

Motivation :

Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont essentielles à la modélisation scientifique, par exemple en : physique, biologie, chimie, économie, épidémiologie, etc.

Elles sont l'exemple le plus simple d'équations différentielles, par opposition aux équations aux dérivées partielles (EDP) qui concernent les fonctions de plusieurs variables.

L'équation différentielle "originelle" est l'équation de Newton

$$m x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

pour la position $x(t) \in \mathbb{R}^3$ d'une masse ponctuelle, où $m = \text{masse}$ et $f = \text{résultante des forces}$. C'est l'équation la plus importante de l'histoire des sciences. Nous traiterons un exemple aux exercices.

En plus de leurs applications directes dans de nombreux domaines des sciences, les EDO jouent aussi un rôle indirect essentielle dans la théorie des EDP. Considérons, par exemple, l'équation elliptique non-linéaire

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d.$$

Cette équation apparaît typiquement lorsqu'on cherche des solutions stationnaires des équations type ondes, Schrödinger, chaleur, etc.

Les solutions radiales $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ satisfont l'EDO d'ordre 2

$$\tilde{u}''(r) + \frac{d-1}{r} \tilde{u}'(r) + f(\tilde{u}(r)) = 0.$$

Ainsi, la théorie des EDO d'ordre 2 joue un rôle fondamental dans les systèmes dynamiques modélisés par des EDP.

Cours 1 : Problème de Cauchy

Une équation différentielle ordinaire d'ordre $n \geq 1$ est une équation de la forme

$$(1.1) \quad F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

que l'on cherche à résoudre pour une fonction

scalaire $x = x(t) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),

où $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle à déterminer également.

On peut souvent écrire (1.1) sous la forme

standard

$$(1.2) \quad X^{(n)} = f(t, X, X', \dots, X^{(n-1)}) .$$

Une EDO de cette forme peut toujours être exprimée sous la forme d'une EDO vectorielle d'ordre 1 par le changement de variables

$$(1.3) \quad \begin{aligned} X_1(t) &= X(t) \\ X_2(t) &= X'(t) \\ X_3(t) &= X''(t) \\ &\vdots \\ X_n(t) &= X^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

qui conduit au système

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = f(t, X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases}$$

pour le vecteur $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

La même démarche permet aussi de transformer une EDO vectorielle de dimension d et d'ordre n en une EDO vectorielle d'ordre 1 et dim $n \cdot d$.

Si elle existe, la solution générale de l'équation scalaire d'ordre n (1.2) sera une fonction $x(t)$ paramétrée par n constantes d'intégration $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Sous certaines hypothèses, la donnée de n conditions initiales à un instant $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$x(t_0) = z_1, \quad x'(t_0) = z_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = z_n,$$

permet alors de fixer la valeur de chaque C_i , et l'on obtient ainsi une unique solution définie

sur un intervalle (ouvert) $\exists t_0$.

Ces considérations motivent l'étude du problème de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$

avec $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $(t_0, x_0) \in D$.

Def: Une fonction $\phi(t)$ est une solution de (PC) si ϕ est dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, $t_0 \in \mathcal{I}$, $\phi(t_0) = x_0$, et on a:

$$\forall t \in \mathcal{I}, (t, \phi(t)) \in D \text{ et } \phi'(t) = f(t, \phi(t)).$$

Rem: Si $\mathcal{I} = [a, b]$, ceci signifie

$$\phi'(a^+) = f(a, \phi(a)), \quad \phi'(b^-) = f(b, \phi(b)).$$

Exemple 1.1: Considérons le problème de Cauchy

$$(1.5) \quad x' = tx, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

pour une inconnue $x: \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'ODE

est une équation à variables séparées, i.e.

de la forme $x' = h(t)g(x)$.

On l'intègre de la façon suivante :

Noter qu'on suppose ici $\rightarrow \frac{x'}{x} = t \Rightarrow \int_0^t \frac{x'(s) ds}{x(s)} = \int_0^t s ds$

$x \neq 0$; cette hypothèse sera justifiée a posteriori.

$$\Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \ln x \Big|_{x_0}^{x(t)} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

On suppose ici $\rightarrow \ln \frac{x(t)}{x_0} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}, t \in]-\infty, \infty[= \mathbb{R}}$

$x(t) > 0 \quad \forall t.$

En raisonnant sur l'équation par disjonction des cas

$$x_0 < 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 > 0,$$

et en tenant compte des implications ci-dessus

(dans le cas $x_0 > 0$), on se convainc aisément que la solution $x(t)$ ainsi obtenue est l'unique solution de (1.5), quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On a donc existence et unicité d'une solution globale (i.e. définie sur $\mathbb{R}$) de (1.5), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 1-2 : Considérons le problème de Cauchy

$$(1.6) \quad x' = x^2, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\int_0^t \frac{x'(s) ds}{x^2(s)} = t$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}}$$

$$\frac{1}{x_0} - t < 0 \\ \Leftrightarrow t > \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{x_0} - t > 0 \\ \Leftrightarrow t < \frac{1}{x_0}$$

$x(t)$ unique sol. de (1.6) sur $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ si $x_0 > 0$

_____ " _____ sur $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ si $x_0 < 0$

On voit que dans les deux cas la solution existe et est unique mais pas globale. On a

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{x_0}} x(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

On parle dans ce cas de solution "explosive" et on verra que ce phénomène est générique pour les solutions non-globales.

Si $x_0 = 0$, $x(t) \equiv 0$ est l'unique solution de (1.6); cf. exos.

Exemple 1.3: Le problème de Cauchy

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0,$$

possède une infinité de solutions ; cf. exos.

Exemple 1.4: Le problème de Cauchy

$$x' = \operatorname{sgn} t := \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}, \quad x(0) = 0,$$

n'a pas de solution, car $x(t) = |t|$ n'est pas dérivable en $t = 0$.